Безрешева Вера
309 гр.

1	2	3	4
+	+	+	+

№ 1.

$\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) \in L_{1+\varepsilon}(1, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = 0$

$f(x) \in L_1(1, +\infty)$?

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^{1+\varepsilon} dx < \infty \ \forall \varepsilon > 0 \qquad \int_0^{\infty} f(x) \cdot dx$$

$x f(x) \to 0$ при $x \to +\infty \Rightarrow \exists A: \ |x f(x)| < \varepsilon \quad \forall x > A$

$\Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{x} \quad \forall x > A$

$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$, $x \geq 2$. $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x \cdot \ln x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

$\int_{\cancel{1}\ 2}^{+\infty} \left(\frac{1}{x \cdot \ln x}\right)^{1+\varepsilon} dx$ сх-ся $\forall \varepsilon > 0$, т.к. сх-ся $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} dx$ и

(в 1 плохо ~~в к нет~~ существенной особенности. можно оценить по Т Вейерштрасса.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \cancel{\ln \ln x \Big|_1^{+\infty}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$$ — расходится.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^{\delta}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{(x-1)^{\delta - 1} \delta} = \{\text{при } 0 < \delta < 1\} = 0$

$\Rightarrow \ln x \leq (x-1)^{\delta}$ при $x \in$ окр-ти 1.

$\Rightarrow \frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{(x-1)^{\delta}}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1. \Rightarrow \ln x \sim x - 1$ в окр-ти 1.

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x \cdot \ln x}\right)^{1+\varepsilon} \sim \left(\frac{1}{x(x-1)}\right)^{1+\varepsilon}$

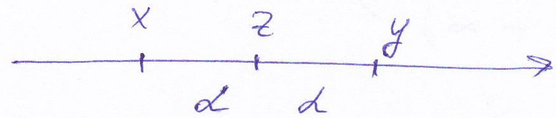
см. стр. 4

№2

$\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$

$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$

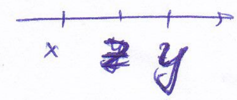
$\sqrt{|x-y|}\le\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}$



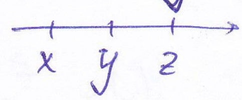
$\sqrt{2\alpha}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}$ v

т.к. в неравенстве треугольника от перемены x и y ничего не меняется, возможны 2 случая:

1) z ~~но~~ между x и y



2) z <u>не</u> между x и y.



Во втором случае нер-во выполняется, т.к

$|x-y|\le|x-z|$ (если x дальше от z, чем y)

$\Rightarrow\sqrt{|x-y|}\le\sqrt{|x-z|}$

В первом случае обозначим $|x-z|=\alpha$ $|y-z|=\beta$

$\Rightarrow$ надо док-ть, что $\sqrt{\alpha+\beta}\le\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ $\forall\alpha,\beta\ge0$

$\alpha+\beta\le\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ – при возведении в квадрат, числа неотриц $\Rightarrow$ верно.

Аксиомы метрики, что $\rho(x,y)\ge0$ $\forall x,y$

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ очевидно выполнены.

$\Rightarrow$ да, превратится.

№ 3.

M_n - л.п. многочленов степени не выше n

$L = \{p(t) \in M_n \mid p(0) = 0\}$

L - п.п.:

1) $\forall \alpha \ \forall p \in L \quad \alpha p(0) = \alpha 0 = 0 \Rightarrow \alpha p \in L$ — αp - многочлен степени не выше n также

2) $\forall p, q \in L \quad (p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 \Rightarrow$ ~~$p+q \in L$~~

степень так же не растёт

$\deg(p+q) \le$ ~~deg~~ $\max\{$~~...~~ $\deg p, \deg q\}$

$\Rightarrow L$ - подпространство.

$L^{\perp}$ в M_n? Чтобы найти $L^{\perp}$, нужно скалярное произв.

Если ~~е~~ $(f, g) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,\ b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0) =$
$= a_n b_n + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + \ldots + a_0 \cdot b_0$, то.

$L^{\perp} = \{c_0,$ ~~...~~ - многочлены степени $0\}$

1) Из $p(0) = 0 \Rightarrow$, что $\forall p \in L$, свободный член p равен 0

$\Rightarrow (p, c_0) = 0$

2) Пусть в M_n $\exists q: (p, q) = 0 \ \forall p \in$ ~~M_n~~ L

Возьмем $p_k =$ ~~1~~ $x^k \quad k = 1, 2, \ldots, n$. - посл-ть многочленов (конечная)

$(p_k, q) = q_k = 0 \Leftrightarrow (q = \sum_{k=1}^{n} q_k x^k + q_0)$

$\Rightarrow q = q_0$. ч.т.д.

№ 4.

Теорема Арцела?

Необх усл. – равностеп. непр.

$$|f_n(x) - f_n(\tilde{x})| \le \varepsilon \qquad \forall x, \tilde{x} : |x - \tilde{x}| \le \delta$$

~~Lsin~~ Рассм. $\sin 2^n x$

$$\sin 2^n x \Big|_{x = \frac{\pi}{2^n}} = 0 \qquad \sin 2^n x \Big|_{x = \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1.$$

Расст. между $\frac{\pi}{2^n}$ и $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ сколь угодно мало.

а разница всегда 1. для $\sin 2^n x$

$\Rightarrow$ равностеп. непр-ти нет $\Rightarrow$

и компактности нет.

№ 1.

Возьмем f как и предполагалось

$$\boxed{f = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln x} & x > 2 \\ \dfrac{1}{2 \ln 2} & x \le 2 \end{cases}}$$

для непр-ти.

Для сх-ти ~~а ин~~ интеграла дост-но рассм $\int_2^{+\infty}$, т.к на $[1, 2]$ – собственный интеграл без особенностей

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x \cdot \ln x}\right)^{1+\varepsilon} dx \quad \text{сх-ся}, \text{ т.к } \left(\frac{1}{x \cdot \ln x}\right)^{1+\varepsilon} \le \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \text{ для больших } x$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \text{ – расх-ся.}$$